Rozšíření MA1 - domácí úkol 6

I. Funkce definované implicitně.

1. i) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$. Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ.

   ii) Je dána rovnice

$$x^2-y^3+x^2y-1=0 \quad (*)\,.$$

   a) Ukažte, že rovnicí (*) a podmínkou $f(1)=0$ je v okolí bodu $(1,0)$ definována implicitně funkce $y=f(x)$.

   b) Vypočítejte $f'(1)$ a $f''(1)$.

   c) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(1,0)$.

   d) Aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

   iii) Je dána rovnice

$$y^3-2y^2x-xy-8=0 \quad (*)\ .$$

   a) Ukažte, že rovnicí (*) je definována implicitně v okolí bodu $(0,2)$ funkce $y=y(x)$.

   b) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(0,2)$.

   c) Aproximujte funkci $y(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

2. i) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=z(x,y)$. Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ.

   ii) Je dána rovnice

$$z^4-x^3yz^2-xz+y^3=0 \qquad (*)\ .$$

   a) Ukažte, že touto rovnicí (*) je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitně funkce $z=z(x,y)$, (neboli rovnicí (*) je definována implicitně funkce $z=z(x,y)\in C^1(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1)=1$) .

   b) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu $z(1{,}01;\,0{,}96)$.

   c) Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z=z(x,y)$ v bodě $(1,1)$

   iii) a) Dokažte, že rovnicí

$$e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0\ .$$

   je definována implicitně funkce $z=z(x,y)$, pro kterou je $z(1,1)=2$.

   b) Určete $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

   c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $z(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

   d) Určete $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

3. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.

   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí

$$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0\ .$$

Rozšíření MA1 - domácí úkol 6

II. Extrémy funkcí dvou proměnných (zkuste vyřešit aspoň dva příklady)

1. Vyšetřete v R^2 lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$

2. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině $M = \{[x,y] \in R^2;\, x + y \le 6 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$.

3. a) Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 2y + 4 = 0$ a podmínkou $z(3,1) = 1$ je definována v okolí bodu $(3,1,1)$ implicitní funkce $z = z(x,y) \in C^2(U(3,1))$.

   b) Ukažte, že bod $(3,1)$ je stacionárním bodem funkce $z = z(x,y)$.
   Vyšetřete, zda funkce $z = z(x,y)$ má v bodě $(3,1)$ lokální extrém.

4. Při jakých rozměrech má pravoúhlá vana daného objemu V nejmenší povrch?